Transformaciones algebraicas de tonos y tríadas: Algebra y música

Guillermo Morales-Luna
Departamento de Computación
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav-IPN
gmorales@cs.cinvestav.mx

16 de julio de 2020

Resumen

Presentamos temas matemáticos de análisis de composición musical, priorizando un punto de vista matemático, en contraste con uno de tipo musical. Si bien esá dirigido a lectores con mayor interés en el análisis de la composición musical, hemos procurado ser rigurosos en la presentación de las ideas matemáticas involucradas.

Índice

1 Introducción

La Teoría Musical ha tenido diversos acercamientos con las Matemáticas, y acaso de las seis Bellas Artes Clásicas, a saber, arquitectura, escultura, pintura, música, declamación y danza, la música es la que se ha tratado más con métodos matemáticos, aún desde los tiempos de Pitágoras de Samos. En la segunda mitad del S. XIX, Hugo Riemann (1849–1919) propuso una serie de transformaciones entre notas y acordes y la composición de ellas las estudió desde el punto de vista de la Teoría de Grupos.

Presentamos aquí, sin pretensión alguna de originalidad, diversos formalismos que permiten el análisis de composiciones musicales como estructuras algebraicas, como productos de gramáticas formales y como productos de procesos estocásticos.

Inicialmente, presentamos las operaciones riemannianas siguiendo un enfoque convencional introducido en [2] y que se ha utilizado en diversos análisis de música popular [1]. Recordamos la noción de tríadas y sus diversas connotaciones, tanto como acordes que como transformaciones. Buscamos ser precisos en distinguir esas dos connotaciones, lo que es muy común pasar por alto en textos de Teoría Musical. Después presentamos las acciones de grupos simétricos y de otros semigrupos sobre las tríadas. Pasamos luego a considerar los órdenes de tonos y operaciones para generar unos a partir de otros. Aquí ponemos especial cuidado en calcular cuántas tales transformaciones existen.

Finalmente, a manera de aplicaciones en Composición Musical recordamos laconstrucción de gráficas de tonos, etiquetadas por operaciones entre tríadas, y describimos las trayectorias como palabras resultantes de gramáticas regulares, esto en línea con tratados más extensos de composición musical basada en gramáticas formales [3, 4]. También, vistas las trayectorias como paseos aleatorios, describimos someramente la noción de procesos markovianos, enfoque muy usual en la actualidad en la composición musical de tipo automático [5].

2 Operaciones riemannianas

En la música occidental, 12 semitonos componen la *escala dodecafónica* o *cromática*, de ellos 7 son *diatónicos*: `do, re, mi, fa, sol, la, si`, y 5 *cromáticos*: `do#, re#, fa#, sol#, la#`, y puestos en forma *ascendente* quedan: `do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si`. Se les pone en correspondencia con los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$. En símbolos, si

$$T_0 = \{\texttt{do, do\#, re, re\#, mi, fa, fa\#, sol, sol\#, la, la\#, si}\} \tag{1}$$

entonces $\nu_0 : \mathbb{Z}_{12} \to T_0$ es la numeración ascendente. También $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ representa a la colección T de semitonos, calificado cada uno de *mayor* o *menor*. Sea ν tal correspondencia que traslada la estructura algebraica, de grupo aditivo, de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ a T. De hecho $T = T_0 \times \{\textit{mayor}, \textit{menor}\}$ y $\nu = (\nu_0, \iota_2)$, donde $\iota_2(0) = \textit{mayor}$ e $\iota_2(1) = \textit{menor}$,

$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ es un grupo abeliano con la estructura de suma directa de sus factores, y es de orden $24 = 12 \cdot 2$.

Si un semitono r se toma como una *raíz*, se establece que

- su *tríada mayor* es la tripleta de semitonos $\texttt{mayor}(r) = (r, r+4, r+7) \in \mathbb{Z}_{12}^3$ y
- su *tríada menor* es la tripleta de semitonos $\texttt{menor}(r) = (r, r+3, r+7) \in \mathbb{Z}_{12}^3$.

Sea $M = \{\texttt{mayor}(r) |\ r \in \mathbb{Z}_{12}\} \cup \{\texttt{menor}(r) |\ r \in \mathbb{Z}_{12}\}$. Asociándole a cada tríada en M su raíz y el índice 0 si es `mayor` y el índice 1 si es `menor` entonces M se pone en correspondencia con $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$. Sea $\mu : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to M$ tal correspondencia biunívoca. Mediante μ, también se traslada la estructura algebraica de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ a M. Naturalmente, existe $\tau : T \to M$ biyectiva tal que $\mu = \tau \circ \nu$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & M \\ & T \arrow[u, dashed, "\tau"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

De hecho, en cada semitono calificado, τ actúa asociándole la tríada con raíz el semitono, siendo mayor o menor la tríada asociada en función de la calificación del semitono. En textos de Teoría Musical, a los elementos de $\mathbb{Z}_2$ se los denota por $+$ y $-$ en vez de 0 y 1. Consecuentemente, a la operación "suma módulo 2" se la denota como la "regla de los signos". Aquí utilizaremos la notación como números.

Ahora bien, las *operaciones riemannianas* son las siguientes:

$$P : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \quad , \quad (i, \varepsilon) \mapsto P(i, \varepsilon) = (i, \bar{\varepsilon}) = (i, 1+\varepsilon), \tag{3}$$

$$L : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \quad , \quad (i, \varepsilon) \mapsto L(i, \varepsilon) = (i + 4\,\upsilon(\varepsilon), 1+\varepsilon) \tag{4}$$

$$\text{donde } \upsilon : \mathbb{Z}_2 \to \{-1, +1\} \ , \ \varepsilon \mapsto 1 - 2\varepsilon,$$

$$R : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \quad , \quad (i, \varepsilon) \mapsto R(i, \varepsilon) = (i + 3\,\upsilon(1+\varepsilon), 1+\varepsilon). \tag{5}$$

(P: *Parallel*; L: *Leittonwechsel*; R: *Relative*). Resulta entonces

$$L \circ R : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \ , \ (i, \varepsilon) \mapsto (i + 7\,\upsilon(1+\varepsilon), \varepsilon).$$

P, L, R son biyectivas, por lo que $L \circ R$ también lo es. Puede verse que P, L, R son permutaciones de orden 2, es decir, son involuciones, en tanto que $o(L \circ R) = 12$.

Cada aplicación $\psi : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ determina una aplicación entre tríadas $\overline{\psi} : M \to M$, haciendo $\overline{\psi} = \mu \circ \psi \circ \mu^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\overline{\psi}"] \arrow[d, "\mu^{-1}"'] & M \\ \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd} \tag{6}$$

donde μ aparece en el diagrama (2). Se confunde voluntariamente ψ con $\overline{\psi}$ por lo que se las denota de igual manera. Como funciones entre tríadas, las operaciones riemannianas actúan como sigue:

$$\begin{array}{llllllll}
P: & (r, r+4, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,0) & \stackrel{P}{\mapsto} & (r,1) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r, r+3, r+7) \\
 & (r, r+3, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,1) & \stackrel{P}{\mapsto} & (r,0) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r, r+4, r+7) \\
 & & & & & & & \\
L: & (r, r+4, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,0) & \stackrel{L}{\mapsto} & (r+4,1) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r+4, r+7, r+11) \\
 & (r, r+3, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,1) & \stackrel{L}{\mapsto} & (r-4,0) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r-4, r, r+3) \\
 & & & & & & & \\
R: & (r, r+4, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,0) & \stackrel{R}{\mapsto} & (r-3,1) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r-3, r, r+4) \\
 & (r, r+3, r+7) & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,1) & \stackrel{R}{\mapsto} & (r+3,0) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & (r+3, r+7, r+10)
\end{array}$$

o, puesto de manera sintetizada

$$\begin{array}{llllllll}
P: & \begin{pmatrix} r \\ r+4-\varepsilon \\ r+7 \end{pmatrix} & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,\varepsilon) & \stackrel{P}{\mapsto} & (r,\overline{\varepsilon}) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & \begin{pmatrix} r \\ r+4-\overline{\varepsilon} \\ r+7 \end{pmatrix} \\
L: & \begin{pmatrix} r \\ r+4-\varepsilon \\ r+7 \end{pmatrix} & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,\varepsilon) & \stackrel{L}{\mapsto} & (r+(-1)^{\varepsilon}\,4,\overline{\varepsilon}) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & \begin{pmatrix} r+(-1)^{\varepsilon}\,4 \\ r+(-1)^{\varepsilon}\,4+4-\overline{\varepsilon} \\ r+(-1)^{\varepsilon}\,4+7 \end{pmatrix} \\
R: & \begin{pmatrix} r \\ r+4-\varepsilon \\ r+7 \end{pmatrix} & \stackrel{\mu^{-1}}{\mapsto} & (r,\varepsilon) & \stackrel{R}{\mapsto} & (r+(-1)^{\overline{\varepsilon}}\,3,\overline{\varepsilon}) & \stackrel{\mu}{\mapsto} & \begin{pmatrix} r+(-1)^{\overline{\varepsilon}}\,3 \\ r+(-1)^{\overline{\varepsilon}}\,3+4-\overline{\varepsilon} \\ r+(-1)^{\overline{\varepsilon}}\,3+7 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para $s \in \mathbb{Z}_{12}$ y dos bits $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{Z}_2$ sea

$$F_{s\delta_0\delta_1} : M \to M \ , \ \begin{pmatrix} r \\ r+4-\varepsilon \\ r+7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (-1)^{\varepsilon+\delta_0}\, s + r \\ (-1)^{\varepsilon+\delta_0}\, s + r + 4 - (\varepsilon+\delta_1) \\ (-1)^{\varepsilon+\delta_0}\, s + r + 7 \end{pmatrix}$$

(la suma de bits debe entenderse en $\mathbb{Z}_2$). Entonces, ha de tenerse $P = F_{001}$, $L = F_{401}$ y $R = F_{311}$. La colección de aplicaciones $(F_{s\delta_0\delta_1})_{s\delta_0\delta_1 \in \mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2}$, de cardinal $48 = 12 \cdot 2^2$, constituye una de *transformaciones uniformes de tríadas*.

De manera alternativa y más convencional se tiene la de las *transformaciones uniformes de tríadas* (*uniform triadic transformations* (UTT)) presentada en [2]. Tales UTT son las siguientes:

$$\forall \delta \in \mathbb{Z}_2\ \forall s_0, s_1 \in \mathbb{Z}_{12} : \quad \begin{array}{rcl} G_{\delta s_0 s_1} : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 & \to & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \ , \\ (r,\varepsilon) & \mapsto & G_{\delta s_0 s_1}(r,\varepsilon) = (r + s_\varepsilon, \delta + \varepsilon) \end{array} \tag{7}$$

y cada aplicación $G_{\delta s_0 s_1}$ es biyectiva, por lo que puede ser vista como una permutación de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$, es decir, como un elemento del grupo simétrico S_{24}. Las funciones de la forma G_{1s_0,s_1} se llaman *Wechsels* (*variantes*), en tanto que las de la forma G_{0s_0,s_1} *Schritts* (*pasos*).

De las relaciones (3)–(5) resulta $P = G_{1,0,0}$, $L = G_{1,4,-4}$ y $R = G_{1,-3,3}$.

La colección de aplicaciones

$$G = (G_{\delta s_0 s_1})_{\delta s_0 s_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}^2}$$

es de cardinal $288 = 2 \cdot 12^2$, y de acuerdo con el diagrama (6) puede considerarse como de funciones $M \to M$ entre tríadas. También puede verse que, para dos puntos $(\delta_0, s_{00}, s_{10}), (\delta_1, s_{01}, s_{11}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}^2$:

$$\begin{aligned} \forall (r,\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 : \quad G_{\delta_0 s_{00} s_{10}} \circ G_{\delta_1 s_{01} s_{11}}(r,\varepsilon) &= G_{\delta_0 s_{00} s_{10}}(r + s_{\varepsilon 1}, \delta_1 + \varepsilon) \\ &= \big((r + s_{\varepsilon 1}) + s_{(\delta_1+\varepsilon)0} \ , \ \delta_0 + (\delta_1 + \varepsilon)\big) \\ &= G_{\delta_0+\delta_1,(s_{01}+s_{\delta_1 0}),(s_{11}+s_{(1+\delta_1)0})}(r,\varepsilon) \end{aligned} \tag{8}$$

Observación 2.1 *Así pues, G es un subgrupo de S_{24} y su multiplicación obedece a la regla (8).*

Observación 2.2 *En G, la subfamilia $H = (G_{0 s_0 s_1})_{s_0 s_1 \in \mathbb{Z}_{12}^2}$ de* Schritts *forma un grupo con la composición de funciones, isomorfo a $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$.*

Observación 2.3 *Resulta que las operaciones riemannianas no están en H, pero aunque $P \notin H$ se ha de tener de (8), considerando $P = G_{100}$:*

$$\forall s_0 s_1 \in \mathbb{Z}_{12}^2 : \quad P \circ G_{0 s_0 s_1} = G_{0 s_0 s_1} \circ P$$

y $G = H \cup PH$ siendo disjunta esta última reunión.

Observación 2.4 *Cada función $G_{\delta s_0 s_1}$ determina una permutación de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ que es el producto de dos ciclos de orden 12.*

En efecto si

$$G_{\delta s_0 s_1} = [(r_{00}, \varepsilon_{00}) \ \cdots \ (r_{11,0}, \varepsilon_{11,0}) \ (r_{01}, \varepsilon_{01}) \ \cdots \ (r_{11,1}, \varepsilon_{11,1})]$$

entonces $[r_{00} \ \cdots \ r_{11,0}]$ y $[r_{01} \ \cdots \ r_{11,1}]$ son meras rotaciones de la permutación identidad $[0\ 1 \ \cdots \ 11]$.

Por tanto cada permutación $G_{\delta s_0 s_1}$ tiene como orden en el grupo simétrico S_{24} a un divisor de 24.

Por otro lado, al escribir a los puntos en $\mathbb{Z}_{12}$ como

$$\begin{bmatrix} s_{00} \\ s_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0 \\ a_0 n_0 + b_0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} s_{01} \\ s_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ a_1 n_1 + b_1 \end{bmatrix}$$

la regla (8) da

$$G_{\delta_0, n_0, a_0 n_0 + b_0} \circ G_{\delta_1, n_1, a_1 n_1 + b_1} = G_{\delta_0+\delta_1, (n_1 + s_{(1+\delta_1)0}), (a_1 n_1 + b_1 + s_{\delta_1 0})}$$

que a su vez da los casos particulares

$$\begin{aligned} G_{0,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{0,n_1,a_1n_1+b_1} &= G_{0,(n_1+a_0n_0+b_0),(a_1n_1+b_1+a_0n_0)} \\ G_{0,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{1,n_1,a_1n_1+b_1} &= G_{1,(n_1+a_0n_0),(a_1n_1+b_1+a_0n_0+b_0)} \\ G_{1,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{0,n_1,a_1n_1+b_1} &= G_{1,(n_1+a_0n_0+b_0),(a_1n_1+b_1+a_0n_0)} \\ G_{1,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{1,n_1,a_1n_1+b_1} &= G_{0,(n_1+a_0n_0),(a_1n_1+b_1+a_0n_0+b_0)} \end{aligned}$$

sintetizados también como

$$G_{\delta_0,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{\delta_1,n_1,a_1n_1+b_1} = G_{\delta_0+\delta_1,(n_1+a_0n_0+(1-\delta_1)b_0),(a_1n_1+a_0n_0+b_1+\delta_1 b_0)} \tag{9}$$

Ahora bien, escribiendo $m_0 = (n_1 + a_0 n_0 + (1-\delta_1)b_0)$ y $m_1 = (a_1 n_1 + a_0 n_0 + b_1 + \delta_1 b_0)$ se tiene

$$\begin{aligned} m_1 &= m_0 + (a_1 n_1 + a_0 n_0 + b_1 + \delta_1 b_0) - (n_1 + a_0 n_0 + (1-\delta_1)b_0) \\ &= m_0 + [a_1 n_1 + a_0 n_0 + b_1 + \delta_1 b_0 - n_1 - a_0 n_0 - (1-\delta_1)b_0] \\ &= m_0 + [(a_1 - 1)n_1 + b_1 + (1 - 2(1-\delta_1))b_0] \,. \end{aligned}$$

Así pues (9) da la regla

$$G_{\delta_0,n_0,a_0n_0+b_0} \circ G_{\delta_1,n_1,a_1n_1+b_1} = G_{\delta_2,n_2,a_2n_2+b_2} \tag{10}$$

donde

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \delta_0+\delta_1\\ n_2 &= n_1+a_0n_0+(1-\delta_1)b_0\\ a_2 &= 1\\ b_2 &= (a_1-1)n_1+b_1+(2\delta_1-1)b_0\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{bmatrix}\delta_0\\ n_0\\ a_0\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_1\\ n_1\\ a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta\\ n\\ a\\ b\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}\delta_2\\ n_2\\ a_2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ (1+a)n+(1-\delta)b\\ 1\\ (a-1)n+2\delta b\end{bmatrix}. \tag{11}$$

En particular:

$$b=0\implies\begin{bmatrix}\delta_2\\ n_2\\ a_2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ (1+a)n\\ 1\\ (a-1)n\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\delta=0\implies\begin{bmatrix}\delta_2\\ n_2\\ a_2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ (1+a)n+b\\ 1\\ (a-1)n\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\delta=1\implies\begin{bmatrix}\delta_2\\ n_2\\ a_2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ (1+a)n\\ 1\\ (a-1)n+2b\end{bmatrix} \tag{14}$$

Las relaciones (11)-(14) dan casos particulares de la regla (10) de composición.

Observamos que al fijar $n\in\mathbb{Z}_{12}$, la ecuación $an=b$ tiene 12 soluciones en $\mathbb{Z}_{12}$ cuando $n=0$ y son de la forma $(a,b)=(a,0)$, con $a\in\mathbb{Z}_{12}$; mas cuando $n\neq 0$ hay soluciones si y sólo si $\mathrm{mcd}(12,n)\,|\,b$ y en tal caso para cada tal b hay $\frac{b}{\mathrm{mcd}(12,n)}$ correspondientes a. En suma, la ecuación $an=b$ posee 12 soluciones (a,b) para cada $n\in\mathbb{Z}_{12}$. Ahora, observamos también

$$a_0n+b_0=a_1n+b_1 \iff (a_1-a_0)n=(b_1-b_0)$$

Por tanto, fijos $\delta\in\mathbb{Z}_2$ y $n\in\mathbb{Z}_{12}$ hay 12 parejas $(a,b)\in\mathbb{Z}_{12}$ tales que $G_{\delta,n,an+b}$ es una misma función.

De acuerdo con la Observación 2.4, cada permutación $G_{\delta,n,an+b}$ tiene un orden que es un divisor de 24. Puede verse que hay 48 funciones de la forma $G_{\delta,n,an+b}$, diferentes a pares, que dan permutaciones de orden 24 y todas ellas corresponden a tomar $\delta=0$. Una lista exhaustiva de ellas, con repeticiones, se sintetiza con las reglas siguientes:

- $n=\{0,6\}\implies\mathrm{mcd}(12,b)=1$ y a con 12 posibilidades en cada caso
- $\mathrm{mcd}(12,n)=1\implies b$ sin restricciones, a con 4 posibilidades en cada caso, con la misma paridad de b
- $\mathrm{mcd}(12,n)\bmod 2=0\implies\mathrm{mcd}(2,b)=1$ y a con 8 posibilidades en cada caso
- $\mathrm{mcd}(12,n)=3\implies\mathrm{mcd}(3,b)=1$ y a con 6 posibilidades en cada caso

3 Tríadas con el grupo simétrico de tres elementos

Para una tríada de semitonos $\mathbf{t}=(t_0,t_1,t_2)$, su *tríada de diferencias* es $D(\mathbf{t})=(t_1-t_0,t_2-t_1,t_0-t_2)\in\mathbb{Z}_{12}^3$. Así pues para toda tríada mayor $\mathbf{t}\in M$ se tiene $D(\mathbf{t})=(4,3,5)$ en tanto que para toda tríada menor $\mathbf{t}\in M$ se tiene $D(\mathbf{t})=(3,4,5)$.

Se representa a S_3 (el grupo de permutaciones de tres elementos) mediante las permutaciones de la lista $[3,4,5]$:

$$\begin{aligned} S_3 &= [\,[3,4,5],[4,5,3],[5,3,4],[4,3,5],[3,5,4],[5,4,3]\,] \\ &= [\,\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5\,]\,. \end{aligned}$$

Así, σ_0 se identifica con la *unidad* o *identidad*, σ_1 con la *rotación* y σ_3 con la *reflexión*. Los *relatores* son entonces σ_1^3, σ_3^2 y $(\sigma_1^2\sigma_3)^2$. Se tiene $S_3 = \langle\sigma_3\rangle \cup \sigma_1\langle\sigma_3\rangle \cup \sigma_1^2\langle\sigma_3\rangle$. La aplicación $\mathbb{Z}_2 \to \langle\sigma_3\rangle$, $\varepsilon \mapsto \sigma_3^\varepsilon$ es un isomorfismo y, en consecuencia, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ y $\langle\sigma_3\rangle \times \mathbb{Z}_{12}$ se identifican naturalmente. Se define

$$\phi : S_3 \times \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}^3\ ,\ (\sigma_j, i) \mapsto (i, i+\sigma_j(0), i+\sigma_j(0)+\sigma_j(1)).$$

Sea $\Phi = \phi(S_3 \times \mathbb{Z}_{12})$, entonces $\mathrm{card}\,(\Phi) = 72 = 6\cdot 12 = 3\cdot 24$. El conjunto Φ consta entonces de tripletas de semitonos, $M \subset \Phi$ y M se identifica también con $\langle\sigma_3\rangle \times \mathbb{Z}_{12}$. El subgrupo de permutaciones pares A_3, de tres elementos (propiamente el engendrado por la rotación) actúa sobre Φ mediante

$$\forall\alpha \in A_3\ \forall\sigma \in S_3\ \forall i \in \mathbb{Z}_{12} :\ \alpha\,\phi(\sigma, i) = \phi(\alpha\sigma, i).$$

4 Representaciones de permutaciones mediante tríadas

Consideremos el conjunto de semitonos T_0 definido por la relación (1). En el ambiente musical, una permutación de T_0 se llama un *orden de tonos* (en inglés *tone row* y en alemán *Tonreihe*). En esta presentación usaremos "permutación" de T_0 y dejaremos de lado el acuerdo musical "orden". Si se tiene una permutación, digamos $\Sigma = [\sigma_0\ \cdots\ \sigma_{11}]$, se la divide de tres en tres y se escribe

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_7 & \sigma_8 \\ \sigma_9 & \sigma_{10} & \sigma_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

donde cada τ_i es la tríada que aparece en el renglón i (para facilitar su lectura, escribimos aquí como columnas a las partículas que han de aparecer como concatenadas). En este enfoque, dada una tríada $\tau = (t_0, t_1, t_2)$ el semitono en el medio, t_1 se considera *raíz*. A cada punto $(r, \varepsilon_0, \varepsilon_1) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2^2$ se le asocia la transformación $\psi_{(r,\varepsilon_0,\varepsilon_1)}$: Tríadas $\to$ Tríadas dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} &\mapsto \left(\textbf{Si } \varepsilon_0 == 0 \textbf{ entonces } \mathtt{rev}^{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} t_0 + r - 4 \\ t_1 \\ t_2 + r - 4 \end{bmatrix} \textbf{ en otro caso } \mathtt{rev}^{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} t_0 + r + 3 \\ t_1 \\ t_2 + r + 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathtt{rev}^{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} t_0 + r + (7\varepsilon_0 - 4) \\ t_1 \\ t_2 + r + (7\varepsilon_0 - 4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde la aritmética es la de $\mathbb{Z}_{12}$ y `rev` es la función que *revierte* las tríadas: $(t_0, t_1, t_2) \mapsto (t_2, t_1, t_0)$. ε_0 determina cambios entre tríadas mayores y menores y ε_1 entre la *preservación* y la *reversión de modo*. Así, para cualquier tríada (t_0, t_1, t_2) se ha de tener

$$\psi_{(4,0,0)}(t_0, t_1, t_2) = (t_0, t_1, t_2) = \psi_{(-3,1,0)}(t_0, t_1, t_2).$$

Se introduce aquí dos modalidades de notación:

- Si $\Sigma_0 = [\tau_{00}, \tau_{10}, \tau_{20}, \tau_{30}]$ y $\Sigma_1 = [\tau_{01}, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}]$ son dos permutaciones y se tiene que $(r_i\varepsilon_{i0}\varepsilon_{i1})\tau_{i0} = \tau_{i1}$, para cada $i \in \{0,1,2,3\}$, entonces se escribe $[(r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31})]\ \Sigma_0 = \Sigma_1$.

- Si τ_0 es una tríada, $\Sigma_1 = [\tau_{01}, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}]$ es una permutación y se tiene que $(r_i\varepsilon_{i0}\varepsilon_{i1})\tau_0 = \tau_{i1}$, para cada $i \in \{0,1,2,3\}$, entonces se escribe $[(r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31})]\ \tau_0 = \Sigma_1$.

Para cada permutación $\Sigma \in S_{12}$ sea $\mathtt{Cuar}(\Sigma)$ el conjunto de cuartetas de la forma

$$\rho = (r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31}) \in (\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4$$

tales que $\rho\,\Sigma$ es una permutación en S_{12}, es decir,

$$\mathtt{Cuar}(\Sigma) = \{\rho \in (\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4 |\ \exists \Sigma_1 \in S_{12} :\ \rho\,\Sigma = \Sigma_1\}.$$

Similarmente, para cada tríada τ sea $\mathtt{Cuar}(\tau) = \{\rho \in (\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4 |\ \exists \Sigma \in S_{12} :\ \rho\,\tau = \Sigma\}$. Como un subconjunto particular está $\mathtt{Cuar}_0(\tau) \subset \mathtt{Cuar}(\tau)$ que consta de las cuartetas $[(r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31})]$ tales que $(r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})\,\tau = \tau$, es decir, la primera tríada en la permutación que forman a partir de τ es τ misma, por lo que ha de regir la implicación: $[(r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31})] \in \mathtt{Cuar}_0(\tau) \implies \varepsilon_{01} = 0$.

Observación 4.1 *Las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

- *Si una cuarteta está en* $\mathtt{Cuar}(\Sigma)$ *cualquier variación de las entradas en terceras posiciones también estará en* $\mathtt{Cuar}(\Sigma)$*, es decir,*

$$\begin{array}{r} (r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01})(r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11})(r_2\varepsilon_{20}\varepsilon_{21})(r_3\varepsilon_{30}\varepsilon_{31}) \in \mathtt{Cuar}(\Sigma) \qquad \implies \\ \forall \delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \in \mathbb{Z}_2 :\ (r_0\varepsilon_{00}\delta_0)(r_1\varepsilon_{10}\delta_1)(r_2\varepsilon_{20}\delta_2)(r_3\varepsilon_{30}\delta_3) \in \mathtt{Cuar}(\Sigma) \end{array}$$

  (pues estos cambios sólo conllevan cambios de sentido en las ternas).

- *Si* ρ *es una cuarteta en* $\mathtt{Cuar}(\Sigma)$ *entonces toda permutación de sus cuatro componentes está también en* $\mathtt{Cuar}(\Sigma)$*. Por tanto,* $\mathrm{card}\,(\mathtt{Cuar}(\Sigma))$ *es un múltiplo de* $384 = 16\cdot 24 = 2^4\cdot 4!$.

  Igualmente, si τ *es una tríada,* $\mathrm{card}\,(\mathtt{Cuar}(\tau))$ *es un múltiplo de* 384.

- *Si* ρ *es una cuarteta en* $\mathtt{Cuar}_0(\tau)$ *entonces toda permutación de sus tres últimas componentes está también en* $\mathtt{Cuar}_0(\tau)$*. Por tanto,* $\mathrm{card}\,(\mathtt{Cuar}_0(\tau))$ *es un múltiplo de* $48 = 8\cdot 6 = 2^3\cdot 3!$.

Observación 4.2 *Para* $r = 3$*, se tiene que* $\mathtt{Cuar}(3+4,3,3+7) = \emptyset$ *y* $\mathtt{Cuar}(3+3,3,3+7) = \emptyset$*, es decir para las correspondientes tríadas mayor y menor, no hay cuartetas que den permutaciones de* T_0*.*

Dada una tríada τ se tiene la relación siguiente en $(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4$:

$\forall \rho_0 = (r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01}), \rho_1 = (r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11}) \in (\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4$ se define $\rho_0 \sim \rho_1$ si al escribir, como en (15),

$$\psi_{\rho_0}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau_{00} \\ \tau_{10} \\ \tau_{20} \\ \tau_{30} \end{bmatrix} \ \&\ \psi_{\rho_1}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau_{01} \\ \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

se ha de tener que la tríada τ_{i0} coincide con τ_{i1} o bien con $\mathtt{rev}(\tau_{i1})$.

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia y ha de valer:

$$\forall \rho_0 = (r_0\varepsilon_{00}\varepsilon_{01}), \rho_1 = (r_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{11}) \in (\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2^2)^4 :\ [\rho_0 \sim \rho_1 \iff r_0 = r_1 \ \wedge\ \varepsilon_{00} = \varepsilon_{10}]\,.$$

Así pues, salvo esta equivalencia, en lo sucesivo podemos omitir los terceros índices en cada función $\psi_{(r\varepsilon_0\varepsilon_1)}$ para referirnos sólo a $\psi_{(r\varepsilon_0)}$ e identificar al conjunto $\mathtt{Cuar}(\tau)$ con su respectivo $\mathtt{Cuar}(\tau)/\sim$.

Ahora, recordemos las funciones $G_{\delta s_0 s_1}$ definidas en (7). Para $(r_i\varepsilon_{i0}), (r_j\varepsilon_{j0}) \in \mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$ vale

$$(r_j,\varepsilon_{j0}) = G_{\delta s_0 s_1}(r_i,\varepsilon_{i0}) \iff s_{\varepsilon_{i0}} = r_j - r_i \ \wedge\ \delta = \varepsilon_{j0} + \varepsilon_{i0}, \tag{16}$$

y esta última relación sólo determina uno de los dos valores s_0, s_1.

Si para una tríada τ se tiene $(r_0\varepsilon_{00})(r_1\varepsilon_{10})(r_2\varepsilon_{20})(r_3\varepsilon_{30}) \in \texttt{Cuar}(\tau)$ entonces existen transformaciones de la forma $G_{\delta s_0 s_1}$ tales que vale el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(r_0\varepsilon_{00}) \arrow[r, mapsto, "G_{\delta_1 s_{10} s_{11}}"] \arrow[d, mapsto, "G_{\delta_3 s_{30} s_{31}}"'] & (r_1\varepsilon_{10}) \arrow[d, mapsto, "G_{\delta_2 s_{20} s_{21}}"] \\
(r_3\varepsilon_{30}) \arrow[r, mapsto, "G_{\delta_4 s_{40} s_{41}}"'] & (r_2\varepsilon_{20})
\end{tikzcd}$$

Además, bajo algunas condiciones en los "signos" ε se puede establecer algunas relaciones entre las funciones$G$. Por ejemplo, si $\varepsilon_{30} \neq \varepsilon_{00}$ entonces podría tomarse $G_{\delta_1 s_{10} s_{11}} = G_{\delta_4 s_{40} s_{41}}$ cumpliendo con (16).

5 Gráficas de semitonos

Mediante las operaciones riemannianas se define la gráfica $\mathcal{G}_R = (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2, A, \eta)$ donde $A \subset (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2)^2$ es el conjunto de *aristas dirigidas* que consta de las parejas ordenadas $((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1))$ tales que

$$\exists \psi \in \{P, L, R\} : \ \psi(r_0, \varepsilon_0) = (r_1, \varepsilon_1) \tag{17}$$

y tal arista se etiqueta con ψ. La aplicación $\eta : A \to \{P, L, R\}$ es pues la *de etiquetado*. De hecho, como P, L, R son involuciones, se puede considerar a las aristas como *bidireccionales*, o de manera más convencional, a la gráfica $\mathcal{G}_R$ como una sin direcciones, o *adirigida*. Las *trayectorias* en $\mathcal{G}_R$ corresponden a palabras en $\{P, L, R\}^*$: a cada trayectoria se la asocia la concatenación de las etiquetas de las aristas que la conforman, y dada una palabra y un punto inicial $(r_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ la palabra determina la trayectoria que parte del punto inicial y va aplicando una a una de manera consecutiva, las operaciones que la conforman. Formalmente, se define la acción (de semigrupo)

$$\mathrm{Tran}_R : \{P, L, R\}^* \times (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$$

de manera recursiva haciendo

$$\forall (r, \varepsilon) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 : \quad \mathrm{Tran}_R(\texttt{nil}, (r, \varepsilon)) = (r, \varepsilon) \quad \wedge \quad \mathrm{Tran}_R(\Psi\psi, (r, \varepsilon)) = \psi\left(\mathrm{Tran}_R(\Psi, (r, \varepsilon))\right)$$

donde `nil` es la palabra vacía. Escribiremos, de manera más corta, $\Psi(r, \varepsilon) := \mathrm{Tran}_R(\Psi, (r, \varepsilon))$.

Para dos elementos $(r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ definimos

$$\mathcal{T}_R\left((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1)\right) = \{\Psi \in \{P, L, R\}^* | \ \Psi(r_0, \varepsilon_0) = (r_1, \varepsilon_1)\},$$

o sea el conjunto de todas las trayectorias que van del elemento inicial (r_0, ε_0) al elemento final (r_1, ε_1). Ya que el diccionario $\{P, L, R\}^*$ es infinito y $\mathrm{card}\,(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2) = 24$, se tiene que $\mathcal{T}_R\left((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1)\right)$ es un conjunto infinito. Naturalmente, este conjunto queda descrito mediante una *expresión regular* en el lenguaje $\{P, L, R\}^*$.

Podemos extender estas definiciones a todo el grupo G definido en (**??**). Sea $\mathcal{G}_G$ la gráfica obtenida como en (17), considerando G en vez de $\{P, L, R\}$ solamente. Así se ha de tener que $\mathcal{G}_G$ es una gráfica dirigida y como en (**??**) se define $\mathcal{T}_G\left((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1)\right)$ el cual también es un lenguaje regular en G^*. Similarmente, si $H < G$ es un subgrupo de G se construye la gráfica $\mathcal{G}_H$ y para cualesquiera dos elementos $(r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ el lenguaje $\mathcal{T}_H\left((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1)\right)$. Observamos que siendo H y G grupos, la composición de dos funciones en ellos es un elemento en ellos. Por tanto, cualquier trayectoria en $\mathcal{T}_G\left((r_0, \varepsilon_0), (r_1, \varepsilon_1)\right)$ puede ser sustituida por una sola arista, de (r_0, ε_0) a (r_1, ε_1).

La composición basada en gramáticas pretende generar gramáticas formales que caractericen a las trayectorias en las gráficas descritas que a su vez describan mejor temas pertenecientes a ciertos géneros musicales. Bien que aquí sólo nos hemos referido a gramáticas regulares, bien puede considerarse como alternativas algunas otras en la Jerarquía de Chomsky.

6 Procesos markovianos

Sea $\Phi \subset \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ un conjunto no vacío. Mediante las correspondencias en el diagrama (2), Φ puede verse como un conjunto de tríadas o como un conjunto de semitonos. Así, $\mathrm{card}\,(\Phi) \leq 24$, y sea F un conjunto de funciones $\Phi \to \Phi$. Para fijar ideas, se podría tomar $\Phi = M$, como se vió en la sección 2, y $F = \{P, L, R\}$ el conjunto de operaciones riemannianas. Sea $\mathcal{G}_F = (\Phi, A)$ la correspondiente gráfica, según se definió en la sección 5. Para cada $\tau \in \Phi$ sea $\mathrm{Vec}_F(\tau) = \{\tau_1 \in \Phi |\ \exists \phi \in F :\ \phi(\tau) = \tau_1\}$ la *vecindad* de τ en $\mathcal{G}_F$.

Un *proceso markoviano* en Φ queda determinado por una matriz $P = \left(p_{\tau_0\tau_1}\right)_{\tau_0\tau_1 \in \Phi\times\Phi}$ donde

$$\forall \tau_0\tau_1 \in \Phi \times \Phi :\ (\text{Probabilidad de pasar a } \tau_1 \text{ estando en } \tau_0) = p_{\tau_0\tau_1} \in [0, 1].$$

Por tanto,

- $\forall \tau_0 \in \Phi\ \forall \tau_1 \in \Phi :\ p_{\tau_0\tau_1} \in [0, 1]\ \wedge\ [\tau_1 \notin \mathrm{Vec}_F(\tau) \implies p_{\tau_0\tau_1} = 0]$
- $\forall \tau_0 \in \Phi :\ \sum_{\tau_1 \in \Phi} p_{t\tau_0\tau_1} = 1$, es decir, la suma de las entradas en cada renglón de P es 1.

Enumérese $\Phi = [t_k]_{k=0}^{\mathrm{card}(\Phi)-1}$. Un *paseo markoviano* es una sucesión $\left(\rho_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi^{\mathbb{N}}$ tal que $\rho_0 \in \Phi$ es una tríada *inicial* y $\forall n \geq 0$, ρ_{n+1} resulta del proceso siguiente:

1. $v_{n0} := 0$; para cada $j \in [\![1, \mathrm{card}\,(\Phi)]\!]$ $v_{nj} := p_{\tau_n t_{j-1}}$;
2. para cada $j \in [\![0, \mathrm{card}\,(\Phi) - 1]\!]$ $I_{nj} := \left[\sum_{k=0}^{j} v_{nk}, \sum_{k=0}^{j} v_{nk} + v_{n,j+1}\right[$;
3. tómese $x \in [0, 1]$, un número real elegido aleatoriamente con distribución uniforme ;
4. sea $j \in [\![0, \mathrm{card}\,(\Phi) - 1]\!]$ el único índice tal que $x \in I_{nj}$;
5. dése como resultado $\rho_{n+1} := t_j$

Algunas variantes consisten en considerar la matriz P dependiendo del tiempo, dando lugar a series de tiempo, precisamente.

Alternativamente, en vez de considerar probabilidades de transición entre tríadas, podría considerarse probabilidades sobre los propios paseos aleatorios generados, lo que da lugar a cadenas de Markov y variantes suyas.

De esta manera, se busca a caracterizar a los sistemas markovianos que ajustan mejor a alguna colección de temas musicales.

Referencias

[1] Guy Capuzzo. Neo-Riemannian Theory and the Analysis of Pop-Rock Music. *Music Theory Spectrum*, 26(2):177–199, 10 2004.

[2] Julian Hook. Uniform Triadic Transformations. *Journal of Music Theory*, 46(1-2):57–126, 10 2002.

[3] Jon Mccormack. Grammar based music composition. In *In R. Stocker et al. (Eds.), From Local Interactions to Global Phenomena, Complex Systems 96*. ISO Press, 1996.

[4] Donya Quick and Paul Hudak. Grammar-based automated music composition in Haskell. In *Proceedings of the First ACM SIGPLAN Workshop on Functional Art, Music, Modeling & Design*, FARM ?13, page 59?70, New York, NY, USA, 2013. Association for Computing Machinery.

[5] D. Volchenkov and J. R. Dawin. Markov Chain Analysis of Musical Dice Games. In *Chaos*, pages 204–229, July 2012.